Ecole Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingéniorat

Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 3 **Année scolaire: 2017/2018**

Série n°1
Généralités et rappels

Date d'éffet:24/09/2017 **Durée: 2 séances**

Exercice 1 : *Réduire à la forme $a+ib$, a et b réels les expressions suivantes*

$$(3+4i)^2, \quad \frac{2+3i}{3-4i}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{3i-1}, \quad \frac{1-i}{1+i}-i+2, \quad \frac{1}{i}$$

$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3, \quad \frac{4+2i}{1-2i}+\frac{3+4i}{2+3i}, \quad \left(\frac{2i}{1-i}\right)^6$$

$$i^{16}-2i^9+i^6-i^3\left(1-i^3\right)+(-i)^{22}$$

Exercice 2 : *Utiliser la forme polaire pour évaluer les expressions données et écrire le résultat sous la forme $a+ib$.*

$$\frac{(1-i)^{23}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{13}}, \quad \left(1+\sqrt{3}i\right)^6+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^2, \quad \left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^3, \quad \frac{(1+i)\left(-\sqrt{3}+i\right)}{1+\sqrt{3}i}, \quad \left(1-\sqrt{3}i\right)^{-10}$$

Exercice 3 : *Montrer que $z=1+i$ satisfait les équations*

$$z^8=16, \quad \frac{10}{z+2}-\frac{5}{z+1}=1$$

Exercice 4 : *Trouver et représenter*

Les racines 6^e de -1. *Les racines carrées de $-5-12i$.*

Les racines 4^e de $-2-2i\sqrt{3}$. *Les racines carrées de $-8-6i$.*

Exercice 5 : *Trouver toutes les valeurs de*

$$i^{\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad 1^{\left(\frac{3}{4}\right)}$$

Exercice 6 : *Résoudre les équations:*

$$z^2=2z-2, \quad z^2=-5+12i, \quad z^2+4z+12-6i=0, \quad z^2\left(1-z^2\right)=16$$

$$z^5=i, \quad z^5=\overline{z}, \quad 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$$

$$z\overline{z}-2\left|z\right|=-1$$

Exercice 7 : *Trouver des nombres réels x et y satisfaisant l'équation:*

$$2x+3yi+5xi-4y+4-2i=2x+y-6+i\left(x-2y+12\right)$$

Exercice 8 : *En utilisant l'inégalité triangulaire montrer que*

$$||z|-|w|| \leq |z-w|$$

Exercice 9 *: Décrire et tracer les lieux donnés par les équations*

$$|z-i|=3. \quad z^2-4z+5=0. \quad |z-1|=2\,|z+1|\,. \quad |z+1|+|z-1|=4. \quad z\left(\overline{z}+1\right)=2.$$

Exercice 10 *: Trouver toutes les racines de l'équation:*

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=-1, \; n \textit{ entier } \geq 1.$$

Exercice 11 *: Déterminer les parties reélles et imaginaires des fonctions complexes suivantes:*

$$\begin{array}{llll} z\mapsto 2z^2-3iz & z\mapsto z+\frac{1}{z} & z\mapsto \frac{1-z}{1+z} & z\mapsto \overline{z}-iz^2 \\ z\mapsto e^{3iz} & z\mapsto z^2+1 & z\mapsto z^{\frac{1}{2}} & z\mapsto z^2e^{2z} \\ z\mapsto \frac{\overline{z}}{z} & & & \end{array}$$

Exercice 12 *: Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations:*

$$\textit{1- } w=\frac{z+1}{z-1}, \quad \textit{2- } w=1+\frac{1}{z}.$$

Exercice 13 *: Soit S un carré du plan de la variable z de sommets* $(0,0)\,,(1,0)\,,(1,1)\,,(0,1)\,,$ *déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par a)* $w=z^2,$ *b)* $w=\frac{1}{z}+1.$

Exercice 14 *: Calculer u et v $(z=x+iy, w=u+iv)$ si* $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$
Déterminer alors l'image du cercle unité par cette transformation.
Même question pour les transformations: a) $w=z^3,$ *b)* $w=\frac{2z-1}{2-z},$ *c)* $w=\frac{1+z}{2-z}$

Exercice 15 *: Etablir que*

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}, \quad \overline{e^z}=e^{\overline{z}}, \quad \left|e^{iz}\right|=e^{-Im(z)}$$

$$|e^z-1|\leq e^{|z|}-1\leq |z|\,e^{|z|}$$

$$\overline{\cos}z=\cos\overline{z}, \quad \overline{\sin}z=\sin\overline{z}, \quad \overline{\tan}z=\tan\overline{z}.$$